

# MI1112 GIẢI TÍCH I

Phiên bản: 2020.1.0

**Mục tiêu:** Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về hàm số một biến số. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn học kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng Toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ và kinh tế.

**Objective:** This course provides the basics knowledge about functions of one variable. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.

**Nội dung:** Giới hạn, liên tục, đạo hàm, vi phân của hàm số một biến số. Tích phân của hàm số một biến số.

**Contents:** Limits, continuities, derivatives, differentials of functions of one variable. Integrals of functions of one variable.

## 1. THÔNG TIN CHUNG

<b>Tên học phần:</b>	Giải tích I (Analysis I)
<b>Mã số học phần:</b>	MI1112
<b>Khối lượng:</b>	3(2-2-0-8) <ul style="list-style-type: none"><li>- Lý thuyết: 30 tiết</li><li>- Bài tập/BTL: 30 tiết</li><li>- Thí nghiệm: 0 tiết</li></ul>
<b>Học phần tiên quyết:</b>	-
<b>Học phần học trước:</b>	-
<b>Học phần song hành:</b>	-

## 2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về phép tính vi phân hàm một biến số, phép tính tích phân hàm một biến số.

## 3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	Nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích 1 và vận dụng thực hành giải được các bài tập liên quan	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản của giải tích 1 như: Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân cấp cao, nguyên hàm và tích phân của hàm một biến số, tích phân suy rộng...	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng các kiến thức để giải được các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U
M2	Đạt được thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần	

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
	<b>thiết để việc làm đạt hiệu quả cao</b>	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của đại số tuyến tính để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

#### 4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

##### Giáo trình

- [1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiền, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.
- [2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiền, Nguyễn Xuân Thảo (2017). *Bài tập Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.
- [3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000). *Bài tập Toán học cao cấp tập 1*, NXBGD, Hà Nội.
- [4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (1999). *Bài tập Toán học cơ cấp tập 2*, NXBGD, Hà Nội.

##### Sách tham khảo

- [1] Trần Bình (1998), *Giải tích I, Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Trần Bình (2005), *Giải tích II và III, Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [3] Trần Bình (2001), *Hướng dẫn giải bài tập giải tích toán học, tập 1*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [4] Trần Bình (2001), *Bài tập giải sẵn giải tích II*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

#### 5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
<b>A1. Điểm quá trình (*)</b>	<b>Đánh giá quá trình</b>			<b>30%</b>
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Kiểm tra giữa kỳ	Thi tự luận		
<b>A2. Điểm cuối kỳ</b>	<b>A2.1. Thi cuối kỳ</b>	Thi tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	<b>70%</b>

\* Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ -2 đến +2 theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.

## 6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CDR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Giới thiệu về môn học</li> <li>- Thông tin giảng viên</li> <li>- Các vấn đề liên quan đến môn học</li> </ul> <p>Cách thức dạy, học và hình thức đánh giá.</p> <p><b>Chương 1. Phép tính vi phân hàm một biến số (18 LT+ 18 BT)</b></p> <p><b>1.1</b> Mở đầu</p> <p><b>1.2</b> Định nghĩa hàm số, một số khái niệm cơ bản về hàm số, hàm hợp, hàm ngược</p> <p><b>1.3</b> Các hàm số sơ cấp cơ bản : Hàm lượng giác ngược, hàm hyperbolic, khái niệm hàm số sơ cấp</p>	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	<p><b>Giảng viên:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tự giới thiệu.</li> <li>- Giới thiệu đề cương môn học.</li> <li>- Giải thích cách thức dạy và học cũng như hình thức đánh giá môn học.</li> <li>- Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài.</li> </ul> <p><b>Sinh viên:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp.</li> <li>- Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng giải các bài tập phù hợp nội dung và tiến độ môn học.</li> </ul>	A1.1: 1.1- 1.3, A1.2, A2.1
2	<p><b>1.4</b> Giới hạn hàm số: hai định nghĩa tương đương, các phép toán và tính chất. Giới hạn của hàm hợp, giới hạn một phía, giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực</p> <p><b>1.5</b> Các khái niệm vô cùng bé (VCB), vô cùng lớn (VCL), so sánh các VCB, VCL, các tính chất và các quy tắc ngắt bỏ VCB, VCL</p>		<p><b>Giảng viên:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài.</li> </ul> <p><b>Sinh viên:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp.</li> <li>- Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.</li> </ul>	A1.1: 1.4- 1.5, A1.2, A2.1
3	<p><b>1.6</b> Hàm số liên tục, liên tục một phía và các tính chất. Điểm gián đoạn của hàm số, phân loại điểm gián đoạn.</p> <p><b>1.7</b> Đạo hàm và vi phân</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Một số khái niệm cơ bản</li> <li>- Đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục.</li> <li>- Đạo hàm của hàm hợp, Đạo hàm của hàm số ngược</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp.</li> <li>- Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.</li> </ul>	A1.1: 1.6- 1.7, A1.2, A2.1
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Vi phân: định nghĩa, ý nghĩa hình học, ứng dụng vi phân để tính gần đúng. Mối liên hệ giữa hàm số có đạo hàm và hàm khả vi. Vi phân của hàm hợp và tính bất biến của vi phân cấp một</li> <li>- Đạo hàm và vi phân cấp cao</li> </ul>			A1.1: 1.7, A1.2, A2.1
5	<p><b>1.8</b> Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng</p>			A1.1: 1.8,

Tuần	Nội dung	CDR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	- Các định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy			A1.2, A2.1
6	- Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin - Các quy tắc L'Hospital để khử dạng vô định, ứng dụng khai triển hữu hạn để tìm giới hạn			A1.1: 1.8, A1.2, A2.1
7	- Hàm số đơn điệu và các tính chất - Bất đẳng thức hàm lồi - Cực trị của hàm số			A1.1: 1.8, A1.2, A2.1
8	<b>1.9</b> Giới thiệu các dạng đường cong - Hàm số $y=f(x)$ (khảo sát)	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 1.9, A1.2, A2.1
9	<b>Kiểm tra giữa kỳ: Từ mục 1.1 đến hết mục 1.8</b>		Thi	A1.2
10	- Đường cong cho dạng tham số - Đường cong cho trong tọa độ cực	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3	<b>Giảng viên:</b> - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài.	A1.1: 1.9, A2.1
11	<b>Chương 2. Phép tính tích phân hàm một biến số (12 LT+ 12 BT)</b> <b>2.1</b> Tích phân bất định - Một số khái niệm cơ bản - Tích phân các hàm phân thức hữu tỉ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	<b>Sinh viên:</b> - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1: 2.1, A2.1
12	- Tích phân các lượng giác, vô tỉ. Một số ví dụ đơn giản về phép đổi biến Euler <b>2.2</b> Tích phân xác định - Định nghĩa, ý nghĩa hình học, cơ học	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 2.1-2.2, A2.1
13	- Tiêu chuẩn khả tích. Các tính chất của tích phân xác định - Công thức đạo hàm theo cận, công thức Newton- Leibniz - Các phương pháp tính <b>2.3</b> Tích phân suy rộng (TPSR): - TPSR loại 1: Định nghĩa, ý nghĩa hình	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1: 2.2-2.3, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	học, các khái niệm hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân			
14	- TPSR loại 1: TPSR của hàm số không âm, các định lý so sánh, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ			A1.1: 2.3, A2.1
15	- TPSR loại 2: Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các khái niệm hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân, TPSR của hàm số không âm, các định lý so sánh, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ <b>2.4 Ứng dụng của tích phân xác định</b> - Sơ đồ tổng tích phân, vi phân			A1.1: 2.3- 2.4, A2.1
16	- Tính diện tích miền phẳng, mặt tròn xoay; thể tích vật thể; độ dài cung phẳng <b>Tổng kết</b>	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3	<b>Giảng viên:</b> - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. <b>Sinh viên:</b> - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1: 2.4, A2.1

## 7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: 26/7/2020

**Viện Toán ứng dụng và Tin học**



*(Handwritten signature)*

**VIỆN TRƯỞNG**  
**VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC**  
**TS. Lê Quang Thủy**

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

**BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I****Nhóm ngành 2****Mã số : MI 1112**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1 đến hết bài các định lý về hàm khả vi và ứng dụng.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

## Chương 1

### Phép tính vi phân hàm một biến số

#### 1.1-1.4. Dãy số, hàm số

**Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số

a)  $y = \sqrt{2 \operatorname{arccot} x - \pi}$

c)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b)  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d)  $y = \arccos(\sin x)$

**Bài 2.** Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $\sinh(-x) = -\sinh x$

d)  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

b)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

e)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f)  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

**Bài 3.** Tìm miền giá trị của hàm số

a)  $y = \log(1 - 2 \cos x)$

c)  $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

b)  $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

d)  $y = \arctan(e^x)$

**Bài 4.** Tìm  $f(x)$  biết

a)  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b)  $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

**Bài 5.** Tìm hàm ngược của hàm số

a)  $y = 2 \arcsin x$

b)  $y = \frac{1-x}{1+x}$

c)  $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

## 1.5-1.6. Giới hạn hàm số

**Bài 6.** Tìm các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, (m, n \in \mathbb{N}^*)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3 \sin x)}$

**Bài 7.** Tìm các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

**Bài 8.** Tìm các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(e + 2x)]^{\frac{1}{\sin x}}$

**Bài 9.** So sánh các cặp VCB sau

a)  $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$  và  $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$ , khi  $x \rightarrow 0^+$

b)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$  và  $\beta(x) = \cos x - 1$ , khi  $x \rightarrow 0^+$

c)  $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$  và  $\beta(x) = \ln(1 + 2 \arctan(x^2))$ , khi  $x \rightarrow 0$

## 1.7. Hàm số liên tục

**Bài 10.** Tìm  $a$  để hàm số liên tục tại  $x = 0$

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b)  $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

**Bài 11.** Điểm  $x = 0$  là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a)  $y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$

c)  $y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

b)  $y = \frac{1}{x} \arcsin x$

d)  $y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, (a \neq b)$

## 1.8. Đạo hàm và vi phân

**Bài 12.** Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

**Bài 13.** Tìm  $f'(x)$  biết  $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$ .

**Bài 14.** Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại  $x = 0$

c) Có đạo hàm liên tục tại  $x = 0$ .

b) Khả vi tại  $x = 0$

**Bài 15.** Chứng minh rằng hàm số  $f(x) = |x - a|\varphi(x)$ , trong đó  $\varphi(x)$  là một hàm số liên tục và  $\varphi(a) \neq 0$ , không khả vi tại điểm  $x = a$ .



**Bài 16.** Tìm vi phân của hàm số

a)  $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c)  $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, (a \neq 0)$

b)  $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d)  $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

**Bài 17.** Tìm

a)  $\frac{d}{d(x^2)} \left( \frac{\sin x}{x} \right)$

b)  $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c)  $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9).$

**Bài 18.** Cho hàm số  $f(x)$ , biết rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của  $f(x)$  tại điểm  $(4; 3)$  đi qua điểm  $(0; 2)$ . Tính  $f(4)$  và  $f'(4)$ .

**Bài 19.** Nếu  $C(x)$  là chi phí sản xuất của  $x$  đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là  $C'(x)$  cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại  $x = 100$ , giá trị đó nói lên điều gì?

**Bài 20.** Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a)  $y = \frac{x^2}{1-x}$ , tính  $y^{(8)}$

d)  $y = x^2 \sin x$ , tính  $y^{(50)}$

b)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ , tính  $y^{(100)}$

e)  $y = e^{x^2}$ , tính  $y^{(10)}(0)$

c)  $y = \ln(2x - x^2)$ , tính  $y^{(5)}$

f)  $y = x \ln(1 + 2x)$ , tính  $y^{(10)}(0)$

**Bài 21.** Tìm đạo hàm cấp  $n$  của hàm số

a)  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

c)  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

e)  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b)  $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

d)  $y = e^{ax} \sin(bx + c)$

f)  $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

**Bài 22.** Tìm vi phân cấp cao của hàm số

a)  $y = (2x + 1) \sin x$ . Tính  $d^{10}y(0)$

c)  $y = x^9 \ln x$ . Tính  $d^{10}y(1)$

b)  $y = e^x \cos x$ . Tính  $d^{20}y(0)$

d)  $y = x^2 e^{ax}$ . Tính  $d^{20}y(0)$

**Bài 23.** Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ  $P$  được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right) P(t) - \beta P(t)$$

với  $r_0$  là tỉ lệ sinh sản,  $P_c$  là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì,  $\beta$  là tỉ lệ khai thác. Cho  $P_c = 10000$ , tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

## 1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

**Bài 24.** Chứng minh rằng  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng  $(0, \pi)$ .

**Bài 25.** Chứng minh rằng phương trình  $x^n + px + q = 0$  với  $n$  nguyên dương,  $n \geq 2$ , không thể có quá 2 nghiệm thực nếu  $n$  chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu  $n$  lẻ.

**Bài 26.** Cho ba số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng phương trình  $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc  $(0, 1)$ .

**Bài 27.** Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$  không áp dụng được đối với các hàm số  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

**Bài 28.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \text{a) } & |\sin x - \sin y| \leq |x - y| & \text{c) } & \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}, \\ & & & 0 < a < b \\ \text{b) } & \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a. & & \end{aligned}$$

**Bài 29.** Tồn tại hay không hàm  $f$  sao cho  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 4$  và  $f'(x) \leq 2$  với mọi  $x$ ?

**Bài 30.** Tìm các giới hạn

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) & \text{d) } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \\ \text{b) } & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) & \text{e) } & \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) \\ \text{c) } & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} & \text{f) } & \lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} \\ & & \text{g) } & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} \end{aligned}$$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan \frac{1}{x}}$

**Bài 31.** Xác định  $a, b$  sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

**Bài 32.** Cho  $f$  là một hàm số thực khả vi trên  $[a, b]$  và có đạo hàm  $f''(x)$  trên  $(a, b)$ . Chứng minh rằng với mọi  $x \in (a, b)$  có thể tìm được ít nhất một điểm  $c \in (a, b)$  sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c).$$

**Bài 33.** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a)  $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

c)  $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

b)  $y = 3 \arctan x - \ln(1 + x^2)$

**Bài 34.** Chứng minh bất đẳng thức

a)  $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$

b)  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$  với mọi  $x \geq 0$

**Bài 35.** Tìm cực trị của hàm số

a)  $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c)  $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

b)  $y = x - \ln(1 + x)$

d)  $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}$

**Bài 36.** Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên đoạn  $[a, b]$ , chứng minh rằng  $\forall c \in (a, b)$  ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

**Bài 37.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)  $\tan \frac{x + y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b)  $x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{2}, \forall x, y > 0$

## 1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

**Bài 38.** Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a)  $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

b)  $y = \ln(1 + e^{-x})$

c)  $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

d)  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$

e)  $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$

**Bài 39.** Khảo sát các hàm số, đường cong sau

a)  $y = e^{\frac{1}{x}-x}$

b)  $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c)  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

d)  $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e)  $\begin{cases} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t} \end{cases}$

f)  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g)  $r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$

h)  $r = a \sin 3\varphi, (a > 0).$

## Chương 2

# Phép tính tích phân hàm một biến số

### 2.1 Tích phân bất định

**Bài 40.** Tính các tích phân

a)  $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

e)  $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^3 + 1}$

i)  $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

b)  $\int (x + 2) \ln x dx$

f)  $\int \frac{dx}{(x + a)^2(x + b)^2}$

j)  $\int \frac{(3 - 2x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c)  $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

g)  $\int \sin 5x \cos 3x dx$

k)  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

d)  $\int \frac{x dx}{(x + 2)(x + 5)}$

h)  $\int \tan^3 x dx$

l)  $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

**Bài 41.** Tính các tích phân

a)  $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

d)  $\int \sin^{n-1} x \sin(n + 1)x dx, n \in \mathbb{N}^*$

b)  $\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

e)  $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

c)  $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

f)  $\int \arcsin^2 x dx$

**Bài 42.** Lập công thức truy hồi tính  $I_n, n \in \mathbb{N}$

a)  $I_n = \int x^n e^x dx$

b)  $I_n = \int \sin^n x dx$

c)  $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

### 2.2 Tích phân xác định

**Bài 43.** Tính các đạo hàm

a)  $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b)  $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

**Bài 44.** Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$

**Bài 45.** Tính các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

**Bài 46.** Tính các tích phân sau

a)  $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$

d)  $\int_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$

b)  $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

e)  $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

c)  $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

f)  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$

**Bài 47.** Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[0, 1]$  thì

a)  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

b)  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx$

Áp dụng tính các tích phân sau

1.  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

2.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

**Bài 48.** Cho  $f(x), g(x)$  là hai hàm số khả tích trên  $[a, b]$ . Chứng minh bất đẳng thức (với  $a < b$ )

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

## 2.3 Tích phân suy rộng

**Bài 49.** Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

$$\text{a) } \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$$

**Bài 50.** Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x^2}$$

$$\text{f) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

$$\text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

$$\text{g) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$$

$$\text{c) } \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\ln^3 x}$$

$$\text{h) } \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$$

$$\text{i) } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{\sqrt{x^3}}$$

$$\text{e) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\text{j) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$$

**Bài 51.** Nếu  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  hội tụ thì có suy ra được  $f(x) \rightarrow 0$  khi  $x \rightarrow +\infty$  không? Xét ví dụ

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

**Bài 52.** Cho hàm  $f(x)$  liên tục trên  $[a, +\infty)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$ . Hỏi  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  có hội tụ không.

## 2.4 Ứng dụng của tích phân xác định

**Bài 53.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$\text{a) Parabol } y = x^2 + 4 \text{ và đường thẳng } x - y + 4 = 0$$

$$\text{b) Đường cong } y = x^3 \text{ và các đường } y = x, y = 4x, (x \geq 0)$$

$$\text{c) Đường tròn } x^2 + y^2 = 2x \text{ và parabol } y^2 = x, (y^2 \leq x)$$

$$\text{d) Đường } y^2 = x^2 - x^4$$

**Bài 54.** Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ  $x^2 + y^2 \leq a^2$  và  $y^2 + z^2 \leq a^2$ , ( $a > 0$ ).

**Bài 55.** Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong  $z = 4 - y^2$ , các mặt phẳng tọa độ  $x = 0$ ,  $z = 0$  và mặt phẳng  $x = a$  ( $a \neq 0$ ).

**Bài 56.** Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường  $y = 2x - x^2$  và  $y = 0$

a) quanh trục  $Ox$  một vòng

b) quanh trục  $Oy$  một vòng

**Bài 57.** Tính độ dài đường cong

a)  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  khi  $x$  biến thiên từ 1 đến 2

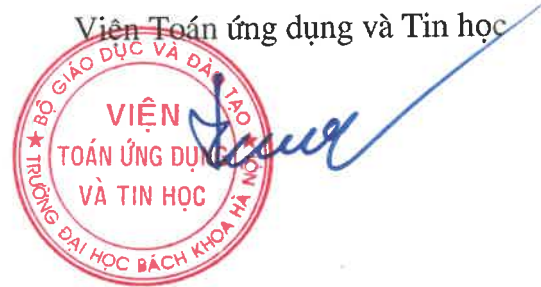
b)  $\begin{cases} x = a \left( \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$  khi  $t$  biến thiên từ  $\frac{\pi}{3}$  đến  $\frac{\pi}{2}$ , ( $a > 0$ )

**Bài 58.** Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a)  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  quay quanh trục  $Ox$

b)  $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$  quay quanh trục  $Ox$

----- Hết -----



VIỆN TRƯỞNG  
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC  
TS. Lê Quang Thủy