

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về hàm số một biến số và nhiều biến số. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn học kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng Toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ và kinh tế.

Objective: This course provides the basics knowledge about functions of one variable and several variables. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.

Nội dung: Giới hạn, liên tục, đạo hàm, vi phân của hàm số một biến số và nhiều biến số. Tích phân của hàm số một biến số.

Contents: Limits, continuities, derivatives, differentials of functions of one variable and several variables. Integrals of functions of one variable.

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Giải tích I ((Analysis I)
Đơn vị phụ trách:	Viện Toán ứng dụng và Tin học
Mã số học phần:	MI1113
Khối lượng:	4(3-2-0-8) - Lý thuyết: 45 tiết - Bài tập: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	Không
Học phần song hành:	Không

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về phép tính vi phân hàm một biến số, phép tính tích phân hàm một biến số, hàm số nhiều biến số.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	Nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích 1 và vận dụng thực hành giải được các bài tập liên quan	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản của giải tích 1 như: Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân cấp cao, cực trị của hàm số một biến số và hàm nhiều biến số; nguyên hàm và tích phân của hàm một biến số, tích phân kép...	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng các kiến thức để giải được các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
M2	Đạt được thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để việc làm đạt hiệu quả cao	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của đại số tuyến tính để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

4. ÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

- [1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiên, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.
- [2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiên, Nguyễn Xuân Thảo (2017). *Bài tập Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.
- [3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000). *Bài tập Toán học cao cấp tập 1*, NXBGD, Hà Nội.
- [4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (1999). *Bài tập Toán học cơ cấp tập 2*, NXBGD, Hà Nội.

Sách tham khảo

- [1] Trần Bình (1998), *Giải tích I, Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Trần Bình (2005), *Giải tích II và III, Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [3] Trần Bình (2001), *Hướng dẫn giải bài tập giải tích toán học, tập 1*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [4] Trần Bình (2001), *Bài tập giải sẵn giải tích II*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	Đánh giá quá trình			30%
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Kiểm tra giữa kỳ	Thi tự luận		
A2. Điểm cuối kỳ	A2.1. Thi cuối kỳ	Thi tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	70%

* Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ -2 đến +2 theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CDR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	<ul style="list-style-type: none"> • Giới thiệu về môn học - Thông tin giảng viên - Các vấn đề liên quan đến môn học <p>Cách thức dạy, học và hình thức đánh giá.</p> <p>Chương 1. Phép tính vi phân hàm một biến số (18 LT+ 13 BT)</p> <p>1.1 Mở đầu</p> <p>1.2 Định nghĩa hàm số, một số khái niệm cơ bản về hàm số, hàm hợp, hàm ngược</p> <p>1.3 Các hàm số sơ cấp cơ bản : Hàm lượng giác ngược, khái niệm hàm số sơ cấp</p> <p>1.4 Dãy số: định nghĩa dãy số, các khái niệm cơ bản. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn: tiêu chuẩn kẹp, tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn.</p>	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	<p>Giảng viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tự giới thiệu. - Giới thiệu đề cương môn học. - Giải thích cách thức dạy và học cũng như hình thức đánh giá môn học. - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. <p>Sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng giải các bài tập phù hợp nội dung và tiến độ môn học. 	A1.1: 1.1- 1.4, A1.2, A2.1
2	<p>1.5 Giới hạn hàm số: hai định nghĩa tương đương, các phép toán và tính chất. Giới hạn của hàm hợp, giới hạn một phía, giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực</p> <p>1.6 Các khái niệm vô cùng bé (VCB), vô cùng lớn (VCL), so sánh các VCB, VCL, các tính chất và các quy tắc ngắt bỏ VCB, VCL</p> <p>1.7 Hàm số liên tục, liên tục một phía, liên tục đều và các tính chất. Điểm gián đoạn của hàm số, phân loại điểm gián đoạn.</p>		<p>Giảng viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. <p>Sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học. 	A1.1: 1.5- 1.7, A1.2, A2.1
3	<p>1.8 Đạo hàm và vi phân</p> <ul style="list-style-type: none"> - Một số khái niệm cơ bản - Đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục. - Đạo hàm của hàm hợp, Đạo hàm của hàm số ngược - Vi phân: định nghĩa, ý nghĩa hình học, ứng dụng vi phân để tính gần đúng. Mối liên hệ giữa hàm số có đạo hàm và hàm khả vi. Vi phân của hàm hợp và tính bất biến 			A1.1: 1.8, A1.2, A2.1

10/10/2018

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	của vi phân cấp một			
4	- Đạo hàm và vi phân cấp cao 1.9 Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng - Các định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy			A1.1: 1.8- 1.9, A1.2, A2.1
5	- Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin - Các quy tắc L'Hospital để khử dạng vô định, ứng dụng khai triển hữu hạn để tìm giới hạn - Hàm số đơn điệu và các tính chất - Bất đẳng thức hàm lồi - Cực trị của hàm số - Phương pháp Newton (tiếp tuyến)			A1.1: 1.9, A1.2, A2.1
6	1.10 Giới thiệu các dạng đường cong - Hàm số $y=f(x)$ (khảo sát) - Đường cong cho dạng tham số - Đường cong cho trong tọa độ cực	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 1.10, A1.2, A2.1
7	Chương 2. Phép tính tích phân hàm một biến số (15 LT+ 9BT) 2.1 Tích phân bất định - Một số khái niệm cơ bản - Tích phân các hàm phân thức hữu tỉ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1: 2.1, A1.2, A2.1
8	- Tích phân các hàm vô tỉ, lượng giác 2.2 Tích phân xác định - Định nghĩa, ý nghĩa hình học, cơ học	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 2.1- 2.2, A1.2, A2.1
9	Kiểm tra giữa kỳ: Chương 1 và chương 2 đến hết tích phân các hàm phân thức hữu tỉ		Thi	A1.2,
10	- Tiêu chuẩn khả tích. Các tính chất của tích phân xác định - Công thức đạo hàm theo cận; công thức Newton- Leibniz - Các phương pháp tính 2.3 Tích phân suy rộng (TPSR): - TPSR loại 1: Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các khái niệm hội tụ, phân kỳ, giá trị	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	Giảng viên: - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. Sinh viên: - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp.	A1.1: 2.2- 2.3, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	của tích phân		- Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	
11	2.4 Ứng dụng của tích phân xác định: Sơ đồ tổng tích phân, vi phân Chương 3. Hàm số nhiều biến số (15 LT+ 10 BT) 3.1 Các khái niệm cơ bản: - Miền, khoảng cách, lân cận, biên - Định nghĩa hàm nhiều biến, ý nghĩa hình học, tập xác định, tập giá trị - Giới hạn của hàm nhiều biến (giới hạn theo hàm điểm), các phép toán			A1.1: 2.4- 3.1, A2.1
12	- Hàm liên tục: Định nghĩa, các phép toán, tính chất 3.2 Đạo hàm riêng và vi phân - Đạo hàm riêng: Định nghĩa, cách tính - Vi phân toàn phần: Định nghĩa, mối liên hệ giữa hàm số khả vi và có đạo hàm riêng, ứng dụng tính gần đúng - Đạo hàm riêng và vi phân của các hàm hợp, tính bất biến của vi phân cấp 1			A1.1: 3.1- 3.2, A2.1
13	- Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao: Định nghĩa, định lý Schwartz về điều kiện các đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau, tính không bất biến của vi phân cấp cao - Công thức khai triển Taylor			A1.1: 3.2, A2.1
14	3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến - Định nghĩa - Quy tắc tìm cực trị	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2		A1.1: 3.3, A2.1
15	- Cực trị có điều kiện - Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất	M2.3		A1.1: 3.3, A2.1
16	3.4 Tích phân kép - Định nghĩa - Cách tính (toạ độ Descartes và toạ độ cực) Tổng kết	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	Giảng viên: - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. Sinh viên: - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài	A1.1: 3.4, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
			tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: ...26/7/2020

Viện Toán ứng dụng và Tin học



VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I**Nhóm ngành 3****Mã số : MI 1113**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1 và chương 2 đến hết tích phân các hàm phân thức hữu tỉ.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

Chương 1

Phép tính vi phân hàm một biến số

1.1-1.4. Dãy số, hàm số

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{2 \operatorname{arccot} x - \pi}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

Bài 2. Tìm miền giá trị của hàm số

a) $y = \log(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$

Bài 3. Biểu tính thuế thu nhập cá nhân được xác định như sau. Dưới 9 triệu, không phải chịu thuế. Từ 9 triệu đến dưới 14 triệu, chịu thuế 5%, từ 14 triệu đến dưới 19 triệu, 10%, từ 19 triệu

đến dưới 27 triệu, 15%, từ 27 triệu đến dưới 41 triệu, 20%, từ 41 triệu đến dưới 61 triệu, 25%. Từ 61 triệu đến dưới 89 triệu, 30%. Từ 89 triệu, 35%. Tìm hàm biểu diễn tiền thuế phải nộp theo mức thu nhập.

Bài 4. Tìm $f(x)$ biết

$$\text{a) } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{b) } f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$$

Bài 5. Tìm hàm ngược của hàm số

$$\text{a) } y = 2 \arcsin x$$

$$\text{b) } y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Bài 6. Tìm giới hạn của những dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau

$$\text{a) } x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$$

$$\text{c) } x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$$

$$\text{b) } x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\text{d) } x_n = \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$$

Bài 7. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát x_n như sau

$$\text{a) } x_n = \sqrt[n]{n^2 + 2}$$

$$\text{b) } x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right), x_0 > 0$$

1.5-1.6. Giới hạn hàm số

Bài 8. Tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, (m, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3\sin x)}$$

Bài 9. Tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

Bài 10. Tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(e + 2x)]^{\frac{1}{\sin x}}$$

Bài 11. So sánh các cặp VCB sau

$$\text{a) } \alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ và } \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x, \text{ khi } x \rightarrow 0^+$$

$$\text{b) } \alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \text{ và } \beta(x) = \cos x - 1, \text{ khi } x \rightarrow 0^+$$

$$\text{c) } \alpha(x) = x^3 + \sin^2 x \text{ và } \beta(x) = \ln(1 + 2 \arctan(x^2)), \text{ khi } x \rightarrow 0$$

1.7. Hàm số liên tục

Bài 12. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Bài 13. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

$$\text{a) } y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x} \arcsin x$$

$$\text{d) } y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, (a \neq b)$$

Bài 14. Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

$$\text{a) } y = \frac{x}{4 - x^2}; -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{b) } y = \ln x; 0 < x < 1$$

1.8. Đạo hàm và vi phân

Bài 15. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Bài 16. Tìm $f'(x)$ biết $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$.

Bài 17. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại $x = 0$

c) Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

b) Khả vi tại $x = 0$

Bài 18. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

Bài 19. Tìm vi phân của hàm số

a) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d) $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|$.

Bài 20. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9)$.

Bài 21. Cho hàm số $f(x)$, biết rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của $f(x)$ tại điểm $(4; 3)$ đi qua điểm $(0; 2)$. Tính $f(4)$ và $f'(4)$.

Bài 22. Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x = 100$, giá trị đó nói lên điều gì?

Bài 23. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$

b) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

e) $y = e^{x^2}$, tính $y^{(10)}(0)$

c) $y = \ln(2x - x^2)$, tính $y^{(5)}$

f) $y = x \ln(1 + 2x)$, tính $y^{(10)}(0)$

Bài 24. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x}{x^2 - 1} & \text{c) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} & \text{e) } y = \sin^4 x + \cos^4 x \\ \text{b) } y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} & \text{d) } y = e^{ax} \sin(bx + c) & \text{f) } y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Bài 25. Tìm vi phân cấp cao của hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = (2x + 1) \sin x. \text{ Tính } d^{10}y(0) & \text{c) } y = x^9 \ln x. \text{ Tính } d^{10}y(1) \\ \text{b) } y = e^x \cos x. \text{ Tính } d^{20}y(0) & \text{d) } y = x^2 e^{ax}. \text{ Tính } d^{20}y(0) \end{array}$$

Bài 26. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c = 10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài 27. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Bài 28. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương, $n \geq 2$, không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Bài 29. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Bài 30. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$

Bài 31. Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

c) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2},$
 $0 < a < b$

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a.$

Bài 32. Tồn tại hay không hàm f sao cho $f(0) = -1, f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x ?

Bài 33. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan \frac{1}{x}}$

Bài 34. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Bài 35. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

Bài 36. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a) $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

c) $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

b) $y = 3 \arctan x - \ln(1+x^2)$

Bài 37. Chứng minh bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$

Bài 38. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

b) $y = x - \ln(1+x)$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

Bài 39. Một nhà bán lẻ bán 1200 TV một tuần ở mức giá 35 triệu. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra, cứ giảm giá 1 triệu thì lượng bán sẽ tăng lên 80 chiếc một tuần. Giá thành sản xuất x chiếc TV trong một tuần là: $C(x) = 350 + 12x$ (triệu).

a) Tìm hàm đơn giá và hàm doanh thu (theo lượng bán).

b) Cửa hàng nên bán ở mức giá bao nhiêu để cực đại doanh thu?

c) Tìm giá bán để cực đại lợi nhuận.

Bài 40. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$ ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Bài 41. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\tan \frac{x+y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \forall x, y > 0$

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

Bài 42. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

c) $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

b) $y = \ln(1+e^{-x})$

Bài 43. Khảo sát hàm số

a) $y = e^{\frac{1}{x}-x}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

d) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

Bài 44. Tính các tích phân

a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

e) $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^3 + 1}$

i) $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

b) $\int (x + 2) \ln x dx$

f) $\int \frac{dx}{(x + a)^2 (x + b)^2}$

j) $\int \frac{(3 - 2x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

g) $\int \sin 5x \cos 3x dx$

k) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

d) $\int \frac{x dx}{(x + 2)(x + 5)}$

h) $\int \tan^3 x dx$

l) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

Bài 45. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

d) $\int \sin^{n-1} x \sin(n + 1)x dx, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

e) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

f) $\int \arcsin^2 x dx$

Bài 46. Lập công thức truy hồi tính $I_n, n \in \mathbb{N}$

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \sin^n x dx$

c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

2.2 Tích phân xác định

Bài 47. Tính các đạo hàm

a) $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b) $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Bài 48. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$

Bài 49. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\tan x \int_0^{\sqrt{\sin x}} \sqrt{\sin t} dt}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

Bài 50. Tính các tích phân sau

a) $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$

d) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$

b) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

e) $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

f) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$

Bài 51. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx$

Áp dụng tính các tích phân sau

1. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Bài 52. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

Bài 53. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân suy rộng sau

a) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

c) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x dx$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

Chương 3

Hàm số nhiều biến số

3.1 Các khái niệm cơ bản

Bài 54. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

c) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$

b) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

d) $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài 55. Tìm các giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + 3xy}, \quad (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$

c) $f(x, y) = \frac{(x-1)^3 - (y-2)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \quad (x \rightarrow 1, y \rightarrow 2)$

d) $f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

e) $f(x, y) = \frac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

f) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

Bài 56. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2},$

b) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

3.2 Đạo hàm riêng và vi phân

Bài 57. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{d) } z = x^{y^3}, (x > 0)$$

$$\text{b) } z = y^2 \sin \frac{x}{y}$$

$$\text{e) } u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$$

$$\text{c) } z = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\text{f) } u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Bài 58. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0; 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$$

Bài 59. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x} z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 60. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

$$\text{a) } z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$$

$$\text{c) } z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$$

Bài 61. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng hàm số $\omega(x, t) = f(x - 3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Bài 62. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\text{a) } z = \sin(x^2 + y^2)$$

$$\text{c) } z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$$

$$\text{b) } z = \ln \tan \frac{y}{x}$$

$$\text{d) } u = x^{y^2 z}$$

Bài 63. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

c) $C = \sqrt{(2,02)^3 + e^{0,03}}$

b) $B = \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$

d) $D = (1,02)^{1,01}$

Bài 64. Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,99; 0,02)$.

Bài 65. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y'

b) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

c) $\arctan \frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$, tính y'

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y .

Bài 66. Cho hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}(0; 1), \frac{\partial z}{\partial y}(0; 1)$.

Bài 67. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Bài 68. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 69. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}.$$

Bài 70. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a) $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 71. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 72. a) Khai triển hàm số $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x + 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $(-2, 1)$.

b) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến số

Bài 73. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 74. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

b) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$

c) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 75. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 76. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Chương 4

Tích phân kép

Bài 77. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

$$a) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$$

$$c) \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$$

$$b) \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x, y) dx$$

Bài 78. Tính các tích phân sau

$$a) \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+xy} dx dy, \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$$

$$b) \iint_{\mathcal{D}} x^2(y-x) dx dy, \text{ với } \mathcal{D} \text{ là miền giới hạn bởi các đường cong } y = x^2 \text{ và } x = y^2$$

$$c) \iint_{\mathcal{D}} 2xy dx dy, \text{ với } \mathcal{D} \text{ giới hạn bởi các đường } x = y^2, x = -1, y = 0 \text{ và } y = 1$$

$$d) \iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) dx dy$$

$$e) \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} \frac{xe^{3y}}{1-y} dy$$

$$f) \iint_{\mathcal{D}} \frac{2xy+1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$g) \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ trong đó } \mathcal{D} : y \leq x^2 + y^2 \leq 2y, x \leq y \leq \sqrt{3}x.$$

$$h) \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 12, x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y, x \geq 0, y \geq 0.$$

Hết



VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy