**MI1121 GIẢI TÍCH II**

Phiên bản: 2020.1.0

***Mục tiêu:*** Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về Ứng dụng của phép tính vi phân vào hình học, Tích phân phụ thuộc tham số, Tích phân bội hai và bội ba, Tích phân đường và Tích phân mặt, Lý thuyết trường. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn học kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng Toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ và kinh tế.

***Objective:*** *This course provides the basics knowledge about applications of differential calculus, parametric dependent integrals, double integrals, triple integrals, line integrals, surface integrals and vector fields. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.*

***Nội dung:*** Ứng dụng phép tính vi phân vào hình học, tích phân phụ thuộc tham số, tích phân bội hai và bội ba, tích phân đường loại một và loại hai, tích phân mặt loại một và loại hai, lý thuyết trường.

***Contents:*** *Applications of differential calculus, parametric dependent integrals, double integrals, triple integrals, line integrals, surface integrals and vector fields.*

## 1. THÔNG TIN CHUNG

| | |
|---|---|
| **Tên học phần:** | Giải tích II *(Analysis II)* |
| **Đơn vị phụ trách:** | Viện Toán ứng dụng và Tin học |
| **Mã số học phần:** | MI1121 |
| **Khối lượng:** | 3(2-2-0-6)<br>- Lý thuyết: 30 tiết<br>- Bài tập/BTL: 30 tiết<br>- Thí nghiệm: 0 tiết |
| **Học phần tiên quyết:** | - MI1111 (Giải tích I) |
| **Học phần học trước:** | - MI1111 (Giải tích I) |
| **Học phần song hành:** | - MI1131 (Giải tích III) |

## 2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về Ứng dụng của phép tính vi phân vào hình học, Tích phân phụ thuộc tham số, Tích phân bội hai và bội ba, Tích phân đường loại một và loại hai, tích phân mặt loại một và loại hai, lý thuyết trường.

## 3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

| **Mục tiêu/CĐR** | **Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần** | **CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)** |
|---|---|---|
| [1] | [2] | [3] |
| **M1** | **Nắm vững được các kiến thức cơ bản của các phép tính tích phân hàm số nhiều biến số và ứng dụng của phép tính vi phân** | |

| Mục tiêu/CĐR | Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần | CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U) |
|---|---|---|
| M1.1 | Nắm vững các khái niệm cơ bản như: tích phân bội hai, bội ba; tích phân đường, tích phân mặt, lý thuyết trường cũng như một số ứng dụng của phép tính vi phân. | I/T |
| M1.2 | Có khả năng vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập liên quan tới nội dung môn học. | T/U |
| **M2** | **Có thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để làm việc có hiệu quả** | |
| M2.1 | Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung. | T/U |
| M2.2 | Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của phép tính vi phân, tích phân để giải quyết. | I/T/U |
| M2.3 | Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao. | I/T |

## 4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

**Giáo trình**


[1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.

[2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2017). *Bài tập Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000). *Bài tập Toán học cao cấp tập 2,* NXBGD, Hà Nội.

[4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (1999). *Bài tập Toán học cao cấp tập 3,* NXBGD, Hà Nội.


**Sách tham khảo**


[1] Trần Bình (2005). *Giải tích II và III*, NXBKH&KT.

[2] Trần Bình (2001). *Bài tập giải sẵn giải tích II*, NXBKH&KT.


## 5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

| Điểm thành phần | Phương pháp đánh giá cụ thể | Mô tả | CĐR được đánh giá | Tỷ trọng |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| **A1. Điểm quá trình (*)** | **Đánh giá quá trình** | | | **30%** |
| | A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà | Tự luận | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | |
| | A1.2. Thi giữa kỳ | Tự luận | | |
| **A2. Điểm cuối kỳ** | **A2.1. Thi cuối kỳ** | Tự luận | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | **70%** |

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ –2 đến +2, theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

## 6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

| **Tuần** | **Nội dung** | **CĐR học phần** | **Hoạt động dạy và học** | **Bài đánh giá** |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| 1 | **Chương 1: Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học (3LT + 3BT)**<br>**1.1** Ứng dụng trong hình học phẳng<br>- Véctơ pháp tuyến và phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến của đường cong tại một điểm<br>- Độ cong: độ cong trung bình, độ cong tại một điểm, công thức tính độ cong tại một điểm (không chứng minh) và ví dụ<br>- Hình bao của một họ đường phụ thuộc tham số: định nghĩa, quy tắc tính (không chứng minh) và ví dụ<br>**1.2** Ứng dụng trong hình học không gian<br>- Hàm véctơ, đạo hàm của hàm véctơ (dạng $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ và một số tính chất | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Giảng bài | A1.1<br>A1.2<br>A2.1 |
| 2 | - Đường: Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại một điểm, độ cong của đường cong tại một điểm (nêu công thức)<br>- Mặt: Phương trình của pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong tại một điểm (nêu công thức)<br>**Chương 2. Tích phân bội (8LT+ 8BT)**<br>**2.1** Tích phân kép<br>- Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các tính chất<br>- Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Decartes | M1.1, M1.2, M2.1, M2.3 | Đọc trước tài liệu;<br>Giảng bài | A1.1<br>A1.2<br>A2.1 |
| 3 | - Đổi biến số trong tích phân kép: công thức đổi biến tổng quát (tọa độ cong), đổi biến trong hệ toạ độ cực. | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu;<br>Giảng bài; | A1.1<br>A1.2<br>A2.1 |
| 4 | - Ứng dụng: Tính thể tích vật thể, diện tích miền phẳng, diện tích mặt cong (nêu công thức và ví dụ)<br>**2.2** Tích phân bội ba<br>- Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các tính chất | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu;<br>Giảng bài; | A1.1<br>A1.2<br>A2.1 |

| Tuần | Nội dung | CĐR học phần | Hoạt động dạy và học | Bài đánh giá |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| 5 | - Cách tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Decartes<br>- Đổi biến số trong tích phân bội ba: công thức đổi biến tổng quát, đổi biến trong hệ toạ độ trụ, cầu | M1.1, M1.2, M2.1, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1 A1.2 A2.1 |
| 6 | - Ứng dụng: Tính thể tích vật thể<br>**Chương 3. Tích phân phụ thuộc tham số (5LT+ 5 BT)**<br>**3.1** Tích phân xác định phụ thuộc tham số<br>- Định nghĩa<br>- Định lý về sự liên tục | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1 A1.2 A2.1 |
| 7 | - Các định lý về lấy tích phân dưới dấu tích phân, đạo hàm dưới dấu tích phân và ví dụ<br>**3.2** Tích phân suy rộng (TPSR) phụ thuộc tham số<br>- Khái niệm TPSR phụ thuộc tham số<br>- Hội tụ đều, tiêu chuẩn Weierstrass | M1.1, M1.2, M2.1, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1 A1.2 A2.1 |
| 8 | - Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số: liên tục, lấy tích phân dưới dấu tích phân, đạo hàm dưới dấu tích phân (không chứng minh) và ví dụ<br>**3.3** Tích phân Euler<br>- Giới thiệu hàm Gamma (ký hiệu là $\Gamma$) và các tính chất: $\Gamma(p)$ xác định, liên tục và khả vi vô hạn<br>$\forall p > 0, \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ với $0 < p < 1$ (không chứng minh)<br>- Giới thiệu hàm Beta (ký hiệu là $B$) và hai dạng khác của hàm $B$, các tính chất (không chứng minh): đối xứng, $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. | M1.1, M1.2, M2.1, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài | A1.1 A1.2 A2.1 |
| 9 | **Kiểm tra giữa kỳ: Từ chương 1 đến hết mục 3.2 của chương 3** | | Thi | |
| 10 | **Chương 4. Tích phân đường (5LT+ 6BT)**<br>**4.1** Tích phân đường loại một<br>- Định nghĩa<br>- Cách tính<br>**4.2** Tích phân đường loại hai<br>- Định nghĩa, ý nghĩa vật lý<br>- Tính chất | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Giảng bài; | A1.1 A2.1 |

| Tuần | Nội dung | CĐR học phần | Hoạt động dạy và học | Bài đánh giá |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| 11 | - Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và loại hai<br>- Cách tính<br>- Công thức Green (chứng minh cho trường hợp miền đơn liên) | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Giảng bài | A1.1<br>A2.1 |
| 12 | - Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân (không chứng minh), áp dụng dẫn đến công thức xác định hàm $u(x,y)$ mà $du = Pdx + Qdy$.<br>**Chương 5. Tích phân mặt (4LT+ 4BT)**<br>**5.1** Tích phân mặt loại một<br>- Định nghĩa<br>- Cách tính | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Giảng bài | A1.1<br>A2.1 |
| 13 | **5.2** Tích phân mặt loại hai<br>- Định nghĩa, tính chất<br>- Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại một và tích phân mặt loại hai<br>- Cách tính | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1<br>A2.1 |
| 14 | - Công thức Ostrogradski, công thức Stokes (không chứng minh)<br>**Chương 6. Lý thuyết trường (5LT+ 4BT)**<br>**6.1** Trường vô hướng<br>- Khái niệm về trường vô hướng, mặt đẳng trị.<br>- Đạo hàm theo hướng: Định nghĩa, định lý về mối quan hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng (hướng dẫn học sinh chứng minh định lý) | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1<br>A2.1 |
| 15 | - Gradien: Định nghĩa véctơ $grad\ u$ và định lý $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = ch_{\vec{\ell}}grad\ u$ (không chứng minh), các tính chất (hướng dẫn học sinh tự chứng minh)<br>**6.2** Trường véctơ<br>- Khái niệm trường véctơ và đường dòng, hệ phương trình vi phân của họ đường dòng<br>- Thông lượng, dive, trường ống: công thức tính thông lượng của một trường véctơ đi qua mặt $S$, khái niệm dive, các tính chất (hướng dẫn học sinh tự chứng minh), khái niệm trường ống, điểm nguồn, điểm rò | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1<br>A2.1 |

| Tuần | Nội dung | CĐR học phần | Hoạt động dạy và học | Bài đánh giá |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| 16 | - Hoàn lưu và véctơ xoáy: khái niệm hoàn lưu của một trường véctơ dọc theo một đường cong kín, véctơ xoáy, điểm xoáy, điểm không xoáy<br>- Trường thế: các khái niệm về trường thế, hàm thế vị của $\vec{F}$, điều kiện để một trường vectơ là trường thế (không chứng minh), từ đó dẫn đến điều kiện để biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm U nào đó, điều kiện để tích phân đường loại hai trong không gian không phụ thuộc vào đường đi<br>- Tổng kết và ôn tập | M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3 | Đọc trước tài liệu; Giảng bài; | A1.1 A2.1 |

## 7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

## 8. NGÀY PHÊ DUYỆT: 15/7/2020

**Viện Toán ứng dụng và Tin học**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

**BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH II**

**Nhóm ngành 1** **Mã học phần: MI 1121**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.
   Nội dung: Từ chương 1 đến hết bài tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

# Chương 1

# Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

## 1.1 Ứng dụng trong hình học phẳng

**Bài 1.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong

a) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$

b) $\begin{cases} x = 2t - \cos(\pi t) \\ y = 2t + \sin(\pi t) \end{cases}$ tại điểm $A$ ứng với $t = 1/2$

c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ tại điểm $M(8;1)$

**Bài 2.** Tính độ cong tại điểm bất kỳ của

a) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$.

b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$

c) $r = ae^{b\varphi}, (a, b > 0)$

**Bài 3.** Tính độ cong của đường $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x > 0$. Khi nào độ cong đạt cực đại? Khi $x \to \infty$ thì độ cong sẽ như thế nào ?

**Bài 4.** Tìm hình bao của họ các đường cong sau

a) $y = \frac{x}{c} + c^2$

b) $cx^2 - 3y - c^3 + 2 = 0$

c) $y = c^2(x-c)^2$

d) $4x\sin c + y\cos c = 1$

## 1.2 Ứng dụng trong hình học không gian

**Bài 5.** Giả sử $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng

a) $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \frac{d\vec{q}(t)}{dt}$

b) $\frac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$

c) $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t)\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}(t)}{dt}\vec{q}(t)$

d) $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t) \times \vec{q}(t)) = \vec{p}(t) \times \frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \times \vec{q}(t)$

**Bài 6.** Đường cong $C$ được biểu diễn bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Giả sử $\vec{r}(t)$ là hàm khả vi và $\vec{r}'(t)$ luôn vuông góc với $\vec{r}(t)$. Chứng minh rằng $C$ nằm trên một mặt cầu tâm tại gốc tọa độ.

**Bài 7.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\sin t\cos t \\ z = c\cos^2 t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}$, $(a, b, c > 0)$

b) $\begin{cases} x = 4\sin^2 t \\ y = 4\cos t \\ z = 2\sin t + 1 \end{cases}$ tại điểm $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$

**Bài 8.** Tính độ cong của các đường cong

a) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{2}$

b) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \\ z = t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \pi$

c) Tính độ cong tại điểm $M(1; 0; -1)$ của đường là giao của mặt trụ $4x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $x - 3z = 4$

**Bài 9.** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

a) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $(2; 2; 3)$

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm $(2; 1; 12)$

c) $\ln(2x + y^2) + 3z^3 = 3$ tại điểm $(0; -1; 1)$

d) $x^2 + 2y^3 - yz = 0$ tại điểm $(1; 1; 3)$

**Bài 10.** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm $A(1; 3; 4)$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2; 1; 6)$

# Chương 2

# Tích phân bội

## 2.1 Tích phân kép

**Bài 11.** Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$ b) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ c) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$

d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{\sin y}^{1+y^2} f(x,y)dx$ e) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

**Bài 12.** Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+xy}dxdy, \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2\}$

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x^2(y-x)dxdy$, với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $x = y^2$

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} 2xydxdy$, với $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $x = y^2, x = -1, y = 0$ và $y = 1$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (x+y)dxdy$, với $\mathcal{D}$ xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1, \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 1$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |x+y|dxdy, \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1; |y| \le 1\}$

f) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy$

g) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} \frac{xe^{3y}}{1-y}dy$

**Bài 13.** Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực của $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền xác định như sau

a) $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ b) $x^2 + y^2 \ge 4x, x^2 + y^2 \le 8x, y \ge x, y \le \sqrt{3}x$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ y \ge 0, (a, b > 0)$ d) $x^2 + y^2 \le 2x, x^2 + y^2 \le 2y$

**Bài 14.** Dùng phép đổi biến trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau

a) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy, \quad (R>0)$

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} xydxdy$, với $\mathcal{D}$ là nửa mặt tròn: $(x-2)^2+y^2 \le 1, y \ge 0$

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (\sin y + 3x)dxdy$, với $\mathcal{D}$ là mặt tròn: $(x-2)^2+y^2 \le 1$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |x+y|dxdy$, với $\mathcal{D}$ là mặt tròn: $x^2+y^2 \le 1$

**Bài 15.** Chuyển tích phân sau theo hai biến $u$ và $v$:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$

b) áp dụng tính với $f(x,y) = (2-x-y)^2$

**Bài 16.** Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \dfrac{2xy+1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: x^2+y^2 \le 1$

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} y \le x^2+y^2 \le 2y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} 2x \le x^2+y^2 \le 12 \\ x^2+y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |9x^2-4y^2|dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (3x+2xy)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} 1 \le xy \le 9 \\ y \le x \le 4y \end{cases}$

## 2.2 Tích phân bội 3

Tính các tích phân bội ba sau

**Bài 17.** $\iiint\limits_V zdxdydz$, trong đó miền $V$ xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2x \\ 0 \le z \le \sqrt{5-x^2-y^2} \end{cases}$

**Bài 18.** $\iiint\limits_V (3xy^2-4xyz)dxdydz$, trong đó miền $V$ xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le xy \le 2 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

**Bài 19.** $\iiint\limits_V xye^{yz^2}dxdydz$, trong đó miền $V$ xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x^2 \le z \le 1 \end{cases}$

**Bài 20.** $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, trong đó miền $V$ xác định bởi: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2-z^2 \leq 0 \end{cases}$

**Bài 21.** $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó

a) $V$ là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng: $y=0, z=0, z=a$, $(y \geq 0, a > 0)$

b) $V$ là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0, (a > 0)$

c) $V$ là nửa của khối elipsoid $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$

**Bài 22.** $\iiint\limits_V ydxdydz$, trong đó $V$ là miền giới hạn bởi mặt nón: $y=\sqrt{x^2+z^2}$ và mặt phẳng $y=h, (h>0)$

**Bài 23.** $\iiint\limits_V \frac{x^2}{a^2}dxdydz$, trong đó $V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1 \ (a, b, c > 0)$

**Bài 24.** $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, trong đó $V: \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \end{cases}$

**Bài 25.** $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó $V$ là miền giới hạn bởi $x^2+y^2=z^2, z=-1$

**Bài 26.** $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{[x^2+y^2+(z-2)^2]^2}$, trong đó $V: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$

**Bài 27.** $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, trong đó $V$ là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq z$

## 2.3 Ứng dụng của tích phân bội

**Bài 28.** Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2=x, y^2=2x \\ x^2=y, x^2=2y \end{cases}$

**Bài 29.** Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi $\begin{cases} y=0, y^2=4ax \\ x+y=3a, y \leq 0, (a>0). \end{cases}$

**Bài 30.** Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $\begin{cases} 2x \leq x^2+y^2 \leq 4x \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$

**Bài 31.** Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $r \geq 1, r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$

**Bài 32.** Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $(a>0)$

a) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$

b) $r=a(1+\cos\varphi)$

**Bài 33.** Chứng minh rằng diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $x^2+(\alpha x-y)^2 \leq 4$ không đổi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

**Bài 34.** Tính thể tích của miền xác định bởi $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+2y \leq 2 \\ y \geq 0, 0 \leq z \leq 2-x-y \end{cases}$

**Bài 35.** Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $\begin{cases} z = 4-x^2-y^2 \\ 2z = 2+x^2+y^2 \end{cases}$

**Bài 36.** Tính thể tích của miền xác định bởi $|x-y|+|x+3y|+|x+y+z| \leq 1$.

**Bài 37.** Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 1+x^2+y^2$, mặt trụ $x^2+4y^2=4$ và mặt phẳng Oxy.

**Bài 38.** Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt: $az = x^2+y^2, z = \sqrt{x^2+y^2}, (a>0)$.

**Bài 39.** Tính diện tích phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2+y^2-2ay=0$, $(a>0)$.

# Chương 3

# Tích phân phụ thuộc tham số

**Bài 40.** Xét tính liên tục của hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

**Bài 41.** Tìm $\lim\limits_{y\to 1} \int\limits_0^y \frac{\arctan x}{x^2+y^2}dx$.

**Bài 42.** Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên đoạn $[0,1]$.

**Bài 43.** Cho hàm số $f(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + y^2\cos^2 x)dx$. Tính $f'(1)$.

**Bài 44.** Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}dx$ là một hàm số liên tục, khả vi đối với biến $y$. Tính $I'(y)$ rồi suy ra biểu thức của $I(y)$.

**Bài 45.** Tính các tích phân sau, (với $a, b, \alpha, \beta$ là các số dương, $n$ là số nguyên dương):

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx$

c) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(bx) - \sin(cx)}{x}dx$

d) $\int\limits_0^1 x^\alpha(\ln x)^n dx$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln(1 + y\sin^2 x)dx$, với $y > -1$

**Bài 46.** Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$

b) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}dx$

c) $\int\limits_0^{+\infty} x^{10}e^{-x^2}dx$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)^2}dx, (2 < n \in \mathbb{N})$

g) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}\sqrt[3]{1-e^{3x}}dx$

h) $\int\limits_{0}^{a} x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}dx,\ (a>0, n\in\mathbb{N})$

i) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx, (2\leq n\in\mathbb{N})$

# Chương 4

# Tích phân đường

## 4.1 Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

**Bài 47.** $\int\limits_C (3x - y)ds$, $C$ là nửa đường tròn $y = \sqrt{9 - x^2}$

**Bài 48.** $\int\limits_C (x - y)ds$, $C$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

**Bài 49.** $\int\limits_C y^2 ds$, $C$ là đường có phương trình $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$

**Bài 50.** $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, $C$ là đường cong $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$

## 4.2 Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

**Bài 51.** $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy - y^2)dy$, trong đó $AB$ là cung Parabol $y = x^2$ từ $A(1; 1)$ đến $B(2; 4)$

**Bài 52.** $\int\limits_C (2x - y)dx + xdy$, trong đó $C$ là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của $t$, $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$

**Bài 53.** $\int\limits_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$, trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 2)$

**Bài 54.** $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$, $D(0; -1)$

**Bài 55.** Tính tích phân sau

$$\int\limits_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường:

a) $x^2+y^2=R^2$　　b) $x^2+y^2=2x$　　c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$

**Bài 56.** $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2(y+\frac{x}{4})dy-y^2(x+\frac{y}{4})dx$

**Bài 57.** $\displaystyle\oint\limits_{OABO} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$

**Bài 58.** $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$

**Bài 59.** $\displaystyle\oint\limits_C (xy^4+x^2+y\cos(xy))dx+(\frac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy))dy$, trong đó $C$ là đường cong $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t,(a>0)\end{cases}$

**Bài 60.** Dùng tích phân đường loại 2 tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid : $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

**Bài 61.** $\displaystyle\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

**Bài 62.** $\displaystyle\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} (1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$

**Bài 63.** Tính tích phân đường

$$I=\int\limits_L (3x^2y^2+\frac{2}{4x^2+1})dx+(3x^3y+\frac{2}{y^3+4})dy$$

trong đó $L$ là đường cong $y=\sqrt{1-x^4}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

**Bài 64.** Tìm hằng số $\alpha$ để tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định

$$\int\limits_{AB}\frac{(1-y^2)dx+(1-x^2)dy}{(1+xy)^\alpha}.$$

**Bài 65.** Tìm hằng số $a$, $b$ để biểu thức : $(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

**Bài 66.** Tìm hàm số $h(x)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(x)[(1+xy)dx+(xy+x^2)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(x)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(2;0)$ đến $B(1;2)$.

**Bài 67.** Tìm hàm số $h(xy)$ để tích phân

$$\int_{AB} h(xy)[(y + x^3y^2)dx + (x + x^2y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(xy)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(1;1)$ đến $B(2;3)$.

# Chương 5

# Tích phân mặt

## 5.1 Tích phân mặt loại I

Tính các tích phân mặt loại 1 sau đây

**Bài 68.** $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4y}{3})dS$, trong đó

$$S=\{(x,y,z): \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$$

**Bài 69.** $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, trong đó $S=\{(x,y,z): z=x^2+y^2; 0\leq z\leq 1\}$

**Bài 70.** $\iint\limits_S zdS$, trong đó $S=\{(x,y,z): y=x+z^2, 0\leq x\leq 1, 0\leq z\leq 1\}$

**Bài 71.** $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y+z)^2}$, trong đó $S$ là biên của tứ diện $x+y+z\leq 2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

## 5.2 Tích phân mặt loại 2

Tính các tích phân mặt loại 2 sau đây

**Bài 72.** $\iint\limits_S z(x^2+y^2)dxdy$, trong đó $S$ là nửa mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$, hướng của $S$ là phía ngoài mặt cầu

**Bài 73.** $\iint\limits_S ydzdx+z^2dxdy$, trong đó $S$ là phía ngoài của mặt ellipsoid $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$, $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

**Bài 74.** $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, trong đó $S$ là mặt trên của nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2, z\leq 0$

**Bài 75.** $\iint\limits_S (y+z)dxdy$, trong đó $S$ là phía trên của mặt $z=4-4x^2-y^2$ với $z\geq 0$

**Bài 76.** $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, trong đó $S$ là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$

**Bài 77.** $\iint\limits_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydzdx$, trong đó $S$ là phía ngoài của miền $\begin{cases} x^2+y^2\leq 1, 0\leq z\leq x^2+y^2 \\ x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$

**Bài 78.** $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, trong đó $S$ là phía ngoài của miền $\begin{cases}(z-1)^2 \geq x^2 + y^2 \\ a \leq z \leq 1\end{cases}$

**Bài 79.** Dùng công thức Stoke tính tích phân đường $\int\limits_C (x+y^2)dx + (y+z^2)dy + (z+x^2)dz$, trong đó $C$ là biên của tam giác với các đỉnh $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$, hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

**Bài 80.** Gọi $S$ là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trong mặt trụ $\begin{cases}x^2+x+z^2=0 \\ y \geq 0,\end{cases}$ hướng của $S$ là phía ngoài của mặt cầu.
Chứng minh rằng: $\iint\limits_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dzdx = 0$.

# Chương 6

# Lý thuyết trường

**Bài 81.** Tính đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ của hàm $u = x^3 + 2y^3 + 3z^2 + 2xyz$ tại điểm $A(2;1;1)$ với $\vec{\ell} = \vec{AB}, B(3;2;3)$.

**Bài 82.** Tính môđun của $\overrightarrow{\text{grad}u}$, với $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}u}$ vuông góc với $Oz$, khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}u} = 0$?

**Bài 83.** Tính $\overrightarrow{\text{grad}u}$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r \text{ trong đó } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Bài 84.** Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số

$$u = x\sin z - y\cos z$$

từ gốc $O(0,0,0)$ là lớn nhất?

**Bài 85.** Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{\text{grad}z}$ của các hàm số

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z = x - 3y + \sqrt{3xy}$$

tại $(3;4)$.

**Bài 86.** Trong các trường sau đây, trường nào là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

a) $\vec{F} = 5(x^2 - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \vec{k}$

b) $\vec{F} = (yz - 3x^2)\vec{i} + xz\vec{j} + (xy + 2)\vec{k}$

c) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$

d) $\vec{F} = C\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, C \neq 0$ là hằng số

e) $\vec{F} = (\arctan z + 4xyz)\vec{i} + (2x^2z - 3y^2)\vec{j} + (\frac{x}{1+z^2} + 2x^2y)\vec{k}$

**Bài 87.** Cho $\vec{F} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

**Bài 88.** Cho $\vec{F} = x(y + z)\vec{i} + y(z + x)\vec{j} + z(x + y)\vec{k}$, $L$ là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 + y = 0$ và nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\vec{F}$ dọc theo $L$ bằng 0.

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI ★ VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS Lê Quang Thủy