MI1122 GIẢI TÍCH II

Phiên bản: 2020.1.0

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về Hàm số nhiều biến số, Ứng dụng của phép tính vi phân vào hình học, Tích phân kép (bội hai), Tích phân đường, Lý thuyết trường. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn học kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng Toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ và kinh tế.

Objective: *This course provides the basics knowledge about functions of several variables, applications of differential calculus, double integrals, line integrals, and vector fields. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.*

Nội dung: Hàm số nhiều biến số, Ứng dụng phép tính vi phân vào hình học, tích phân kép (bội hai), tích phân đường loại một và loại hai, lý thuyết trường.

Contents: *Functions of several variables, applications of differential calculus, double integrals, line integrals, and vector fields.*

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Giải tích II *(Analysis II)*
Mã số học phần:	MI1122
Khối lượng:	3(2-2-0-6) - Lý thuyết: 30 tiết - Bài tập/BTL: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	- MI1112 (Giải tích I)
Học phần học trước:	- MI1112 (Giải tích I)
Học phần song hành:	- MI1132 (Giải tích III)

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về Hàm số nhiều biến số, Ứng dụng của phép tính vi phân vào hình học, Tích phân kép (bội hai), Tích phân đường, lý thuyết trường.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	**Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần**	**CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)**
[1]	[2]	[3]
M1	**Nắm vững được các kiến thức cơ bản của các phép tính vi phân và tích phân hàm số nhiều biến số**	

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản như: vi phân của hàm nhiều biến số và ứng dụng, tích phân bội hai, tích phân đường, lý thuyết trường.	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U
M2	**Có thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để làm việc có hiệu quả**	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của phép tính vi phân, tích phân để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

[1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.

[2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2017). *Bài tập Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000). *Bài tập Toán học cao cấp tập 2*, NXBGD, Hà Nội.

[4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (1999). *Bài tập Toán học cao cấp tập 3*, NXBGD, Hà Nội.

Sách tham khảo

[1] Trần Bình (2005). *Giải tích II và III*, NXBKH&KT.

[2] Trần Bình (2001). *Bài tập giải sẵn giải tích II*, NXBKH&KT.

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	**Đánh giá quá trình**			**30%**
	Thi giữa kỳ	Tự luận		30%
A2. Điểm cuối kỳ	**Thi cuối kỳ**	Tự luận		**70%**

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ −2 đến +2, theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	**Chương 1. Hàm số nhiều biến số (12LT + 12BT)** **1.1** Các khái niệm cơ bản: - Miền, khoảng cách, lân cận, biên, miền đóng, mở, bị chặn - Định nghĩa hàm nhiều biến, ý nghĩa hình học, tập xác định, tập giá trị - Giới hạn của hàm nhiều biến (giới hạn theo hàm điểm), các phép toán	M1.1, M1.2, M2.1, M2.3	Giảng bài	A1.1 A1.2 A2.1
2	- Hàm liên tục: Định nghĩa, các phép toán, tính chất, liên tục đều **1.2** Đạo hàm và vi phân - Đạo hàm riêng: Định nghĩa, cách tính	M1.1, M1.2, M2.1, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài	A1.1 A1.2 A2.1
3	- Vi phân toàn phần: Định nghĩa, mối liên hệ giữa hàm số khả vi và có đạo hàm riêng, ứng dụng tính gần đúng - Đạo hàm và vi phân của các hàm hợp, tính bất biến của dạng thức vi phân	M1.1, M1.2, M2.1, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A1.2 A2.1
4	- Hàm ẩn: Định nghĩa, định lý tồn tại và cách tính đạo hàm - Đạo hàm và vi phân cấp cao: Định nghĩa, định lý Schwartz về điều kiện các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau, tính bất biến của vi phân cấp cao không còn đúng đối với hàm hợp	M1.1, M1.2, M2.1, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A1.2 A2.1
5	- Công thức khai triển Taylor **1.3** Cực trị của hàm số nhiều biến số - Định nghĩa, - Quy tắc tìm cực trị	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A1.2 A2.1
6	- Cực trị có điều kiện - Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A1.2 A2.1
7	**Chương 2. Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học (3LT + 3BT)** **2.1** Ứng dụng trong hình học phẳng - Véctơ pháp tuyến và phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến của đường cong tại một điểm	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A1.2 A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	- Độ cong của đường cong tại một điểm (nêu công thức tính) **2.2** Ứng dụng trong hình học không gian - Hàm véctơ, đạo hàm của hàm véctơ (dạng $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ và một số tính chất			
8	- Đường: Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại một điểm - Mặt: Phương trình của pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong tại một điểm (nêu công thức) **Chương 3. Tích phân kép (5LT + 5BT)** - Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các tính chất	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài	A1.1 A1.2 A2.1
9	**Kiểm tra giữa kỳ: Từ chương 1 đến hết mục 2.2 của chương 2**		Thi	
10	- Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Decartes - Đổi biến số trong tích phân kép: công thức đổi biến tổng quát (toạ độ cong).	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Giảng bài;	A1.1 A2.1
11	- Tọa độ cực, đổi biến trong hệ toạ độ cực. - Ứng dụng: Tính thể tích vật thể, diện tích miền phẳng, diện tích mặt cong (nêu công thức và ví dụ)	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Giảng bài	A1.1 A2.1
12	**Chương 4. Tích phân đường (6LT + 7BT)** **4.1** Tích phân đường loại một - Định nghĩa, cách tính **4.2** Tích phân đường loại hai - Định nghĩa, ý nghĩa vật lý	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Giảng bài	A1.1 A2.1
13	- Tính chất, mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và loại hai - Cách tính	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A2.1
14	- Công thức Green (chứng minh cho trường hợp miền đơn liên) - Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân (không chứng minh), áp dụng dẫn đến công thức xác định hàm $u(x, y)$ mà	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	$du = Pdx + Qdy$			
15	**Chương 5. Lý thuyết trường (4LT+ 3BT)** **5.1** Trường vô hướng - Khái niệm về trường vô hướng, mặt đẳng trị. - Đạo hàm theo hướng: Định nghĩa, định lý về mối quan hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng (hướng dẫn học sinh chứng minh định lý) - Gradien: Định nghĩa véctơ $grad\ u$ và định lý $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = ch_{\vec{\ell}}grad\ u$ (không chứng minh), các tính chất (hướng dẫn học sinh tự chứng minh)	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A2.1
16	**5.2** Trường véctơ - Khái niệm trường véctơ và đường dòng, hệ phương trình vi phân của họ đường dòng - Khái niệm div, rot của trường véc tơ - Trường thế: các khái niệm về trường thế, hàm thế vị của $\vec{F}$, điều kiện để một trường vectơ là trường thế (không chứng minh), từ đó dẫn đến điều kiện để biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm U nào đó, điều kiện để tích phân đường loại hai trong không gian không phụ thuộc vào đường đi	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	Đọc trước tài liệu; Giảng bài;	A1.1 A2.1

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: 15/7/2020

Viện Toán ứng dụng và Tin học

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH II

Nhóm ngành 2 Mã học phần: MI 1122

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.
   Nội dung: Từ Chương 1 đến hết bài Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian.
2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

Chương 1

Hàm số nhiều biến số

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

b) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

c) $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$

d) $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài 2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^4+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

b) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+3xy}, \quad (x \to \infty, y \to \infty)$

c) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x(e^y-1)-y(e^x-1)}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

Bài 3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

b) $z = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$

c) $z = x^{y^3}, (x>0)$

d) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

Bài 4. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

a) $f(x,y)=\begin{cases} x\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)^2, & \text{nếu } x\neq 0\\ 0, & \text{nếu } x=0\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y)\neq(0;0)\\ 0, & \text{nếu } (x,y)=(0;0)\end{cases}$

Bài 5. Giả sử $z=yf(x^2-y^2)$, trong đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x}{z_x}'+\frac{1}{y}{z_y}'=\frac{z}{y^2}.$$

Bài 6. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau:

a) $z=e^{u^2-2v^2}, u=\cos x, v=\sqrt{x^2+y^2}$

b) $z=\ln\left(u^2+v^2\right), u=xy, v=\dfrac{x}{y}$

c) $z=\arcsin\left(x-y\right), x=3t, y=4t^3$

Bài 7. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $\omega(x,t)=f(x-3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$.

Bài 8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $z=\sin(x^2+y^3)$

b) $z=\ln\tan\dfrac{y}{x}$

c) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $u=x^{y^2z}$

Bài 9. Tính gần đúng

a) $A=\sqrt{(2,02)^3+e^{0,03}}$

b) $B=(1,02)^{1,01}$

Bài 10. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $x^3y-y^3x=a^4$, tính y'

b) $x^2+y+z^3+e^z=0$, tính ${z_x}', {z_y}'$

c) $\arctan\dfrac{x+y}{a}=\dfrac{y}{a}$, tính y'

d) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, tính ${z_x}', {z_y}'$

Bài 11. Cho hàm số ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y+4y^2+x^2z+z^3=3$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0;1), \dfrac{\partial z}{\partial y}(0;1)$.

Bài 12. Cho $u=\dfrac{x+z}{y+z}$, tính ${u_x}', {u_y}'$ biết rằng z là hàm số ẩn của x,y xác định bởi phương trình $ze^z=xe^x+ye^y$.

Bài 13. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{1}{z}.$$

Bài 14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau:

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 15. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2 y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 16. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 17. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$.

Bài 18. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 19. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Chương 2

Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Ứng dụng trong hình học phẳng

Bài 20. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại điểm $(-2; 5)$

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$

c) $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$

Bài 21. Tính độ cong của

a) $y = \ln(\cos x)$ tại điểm ứng với $x = \pi/4$

b) $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = \ln(2t-1) \end{cases}$ tại điểm $M(3; 0)$

Bài 22. Tìm điểm M trên parabol $P\colon y = x^2 - 4x + 6$ sao cho độ cong của P tại M đạt lớn nhất.

Ứng dụng trong hình học không gian

Bài 23. Giả sử $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t)\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}\vec{q}(t)$

b) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$

Bài 24. Đường cong C được biểu diễn bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Giả sử $\vec{r}(t)$ là hàm khả vi và $\vec{r}'(t)$ luôn vuông góc với $\vec{r}(t)$. Chứng minh rằng C nằm trên một mặt cầu tâm tại gốc tọa độ.

Bài 25. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \pi/4$, $(a, b, c > 0)$

b) $x = 2\cos t, y = 4\sin t, z = 4\cos^2 t + 1$ tại điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 3)$

Bài 26. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

a) $x^2 + 3y + 2z^3 = 3$ tại điểm $(2; -1; 1)$

b) $z = \ln(2 + 3x^2 - 4y^2)$ tại điểm $(1; 1; 0)$

c) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$ tại điểm $(1; -1; 1)$

d) $x^2 + 2y^3 - yz = 0$ tại điểm $(1; 1; 3)$

e) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ tại điểm $(4; 1; -4)$

Bài 27. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$ tại điểm $A(4; -3; 0)$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2; 1; 6)$

Chương 3

Tích phân kép

Tích phân kép

Bài 28. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\sin x}^{1+x^2} f(x,y)dy$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

Bài 29. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (2y-x)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $y = 1$

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |x-y|dxdy$, trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sqrt{y^2-x^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = x, x = 0$ và $y = 1$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} 2xydxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $x = y^2, x = -1, y = 0$ và $y = 1$

f) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy$

g) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[4]{x}}^{1} \frac{dy}{y^5+1}$

Bài 30. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực của $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau

a) $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$

b) $x^2 + y^2 \ge x, x^2 + y^2 \le 2x, x \le y, y \le \sqrt{3}x$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ y \ge 0, (a, b > 0)$

Bài 31. Dùng phép đổi biến trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2}dy, \quad (R > 0)$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le x$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy$, với $\mathcal{D} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$

d) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} xydxdy$, với

1) $\mathcal{D}$ là mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \le 1$
2) $\mathcal{D}$ là nửa mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$

e) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} |x-y|dxdy$, với $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le 1$

Bài 32. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v

a) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2 - x - y)^2$.

Bài 33. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} y \le x^2 + y^2 \le 2y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le 1$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 12 \\ x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |9x^2 - 4y^2| dxdy$, trong đó $\mathcal{D} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (4xy + 3y) dxdy$, trong đó $1 \leq xy \leq 4, x \leq y \leq 9x$

3.1 Ứng dụng của tích phân bội

Bài 34. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$

Bài 35. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0, (a > 0). \end{cases}$

Bài 36. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $\begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$

Bài 37. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $r \geq 1; r \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\varphi$.

Bài 38. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos\varphi)$, $(a > 0)$.

Bài 39. Chứng minh rằng diện tích miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $x^2 + (\alpha x - y)^2 \leq 4$ không đổi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 40. Tính thể tích của miền xác định bởi

$$x + y \geq 1,\ x + 2y \leq 2,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2 - x - y.$$

Bài 41. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2.$$

Chương 4

Tích phân đường

Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

Bài 42. $\int\limits_C (xy + x + 2y)ds$, trong đó C là đường cong $x = \cos t, y = \sin t$ với $0 \le t \le \pi/2$

Bài 43. $\int\limits_C xyds$, trong đó C là nửa đường elip $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1, y \ge 0$

Bài 44. $\int\limits_C (x - y)ds$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

Bài 45. $\int\limits_C y^2 ds$, C là đường có phương trình $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$

Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

Bài 46. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (3xy + 1)dy$, trong đó L là cung parabol $y = x^2$ từ $O(0;0)$ đến $M(1;1)$

Bài 47. $\int\limits_C (2x - y)dx + xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của t, $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$

Bài 48. $\int\limits_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$ trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$

Bài 49. $\int\limits_{ABCDA} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$ và $D(0;-1)$

Bài 50. Tính tích phân sau

$$\int\limits_C (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường

a) $x^2+y^2=R^2$ b) $x^2+y^2=2x$ c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, (a,b>0)$

Bài 51. $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y+\frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x+\frac{y}{4}\right)dx$

Bài 52. $\displaystyle\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$ và $B(0;2)$

Bài 53. $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$

Bài 54. $\displaystyle\oint\limits_C \left(xy^4+x^2+y\cos(xy)\right)dx+\left(\frac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy)\right)dy$, trong đó C là đường cong $x=a\cos t, y=a\sin t, (a>0)$

Bài 55. Dùng tích phân đường loại hai tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid: $x=a(t-\sin t); y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

Bài 56. $\displaystyle\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

Bài 57. $\displaystyle\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$

Bài 58. Tính tích phân đường $\displaystyle\int\limits_C (y^2-e^y\sin x)dx+(x^2+2xy+e^y\cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $x=\sqrt{2y-y^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $P(0;2)$.

Bài 59. Tìm hằng số a, b để biểu thức $(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

Bài 60. Tìm hàm số $h(y)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(y)[y(2x+y^3)dx-x(2x-y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(y)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(0;1)$ đến $B(-3;2)$.

Chương 5

Lý thuyết trường

Bài 61. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ của hàm $u = 3x^3 + y^2 + 2z^3 - 2xyz$ tại điểm $A(1;2;1)$ với $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}$, $B(2;4;2)$.

Bài 62. Cho hàm số $u(x,y,z) = x^3 + 3x^2y + 2yz^3$. Tính đạo hàm $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ tại điểm $A(1;1;-1)$, trong đó $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại điểm A.

Bài 63. Tính môđun của $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u = \vec{0}$?

Bài 64. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r, \text{ với } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài 65. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x\sin z - y\cos z$ từ gốc $O(0;0;0)$ là lớn nhất?

Bài 66. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{\text{grad}}z$ của các hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $(3;4)$.

Bài 67. Trong các trường vectơ sau đây, trường nào là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có)

a) $\vec{F} = (x^2 - 4xy)\vec{i} + (2x^3 - 2z)\vec{j} + e^z\vec{k}$

b) $\vec{F} = (yz + 1)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (xy - 3)\vec{k}$

c) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$

d) $\vec{F} = C\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $C \neq 0$ hằng số

e) $\vec{F} = (3x^2 + 2yz)\vec{i} + (y^2 + 2xz + e^y)\vec{j} + (9z^2 + 2xy)\vec{k}$

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy